Doppel-periodische Funktionen und die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 30.03.2009

Stefanie Kessler

Die komplexen Zahlen als Erweiterung der reellen Zahlen ermöglichen es, auch periodische Funktionen in eine weitere Dimension auszudehnen und sogenannte doppelt-periodische Funktionen zu untersuchen. Solche als elliptisch bezeichneten Funktionen werden im Folgenden vorgestellt, sodass anschließend mit der Weierstraßsche $\wp$-Funktion ein prominentes Beispiel konstruiert werden kann. Dabei wird man feststellen, dass sich holomorphe elliptische Funktionen sehr einfach darstellen lassen, weswegen meromorphe Funktionen in den Mittelpunkt rücken werden.

§1 Doppelt-periodische Funktionen

Zunächst werden in diesem Abschnitt "Gitter "als Hilfskonstrukte für doppelt- periodische Funktionen definiert, anhand derer eine Charakterisierung der elliptischen Funktionen erfolgen wird.

(1.1) Definition (Gitter)
Seien a,b $\in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Dann ist die Gruppe
$\Lambda = \Lambda(a,b) = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b = \{k \cdot a + l \cdot b;\ l, k \in \mathbb{Z}\}$ ein *Gitter* in $\mathbb{C}$. Sie bildet eine Untergruppe der additiven Gruppe ($\mathbb{C}$,+). $\diamond$

Anschaulich gesprochen legt man sich mit obiger Definition auf Gitterpunkte in der komplexen Ebene fest, wobei die Größe der Maschen durch die Wahl von a und b vorgegeben ist. Aus diesem Grund nennt man a und b **Erzeuger** bzw. $\mathbb{Z}$- **Basis** des Gitters. Die Bedingung der linearen Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ stellt hierbei sicher, dass die Ausdehnung des Gitters in zwei, nicht nur in eine Dimension, verläuft.
Wählt man z.B. a=3+4i und b=6+8i, so sieht man in der Tupelschreibweise (3,4) bzw. (6,8), dass über $\mathbb{R}$ mit dem Faktor 2 eine lineare Abhängigkeit vorliegt. a=3+4i und c=6+5i bilden hingegen ein erzeugendes Paar.
Sofort ersichtlich ist auch, dass der Nullpunkt in jedem Gitter enthalten ist. Eine Vergrößerung der Maschen mittels zweier Elemente m,n $\in \mathbb{N}$ führt zu einer Untergruppe $\Lambda(n \cdot a, m \cdot b)$, einem sogenannten Untergitter von $\Lambda(a,b)$.

Bevor wir uns doppelt-periodische Funktionen zuwenden können, erinnern wir uns an meromorphe Funktionen:
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt meromorph, wenn sie auf $U \setminus A$ holomorph ist, wobei A eine in U diskrete Teilmenge ist, f in den Punkten von A Polstellen hat und dort den Wert ∞ annimmt. Als einfaches Beispiel sei an dieser Stelle die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z^2}$ genannt, die in 0 einen Pol zweiter Ordnung hat.

Nun zu unserem ersten Ziel, zur Definition einer doppelt-periodischen Funktion:

(1.2) Definition (Doppelt-periodische Funktion)
Für ein Gitter Λ in $\mathbb{C}$ heißt eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ *doppelt-periodisch* zum Gitter Λ bzw. $\Lambda -$ *periodisch* oder elliptisch, falls

$$f(z + \lambda) = f(z) \qquad\qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\ \forall\, \lambda \in \Lambda$$

gilt. $\diamond$

Aus der doppelten Periodizität von f zu Λ folgt offensichtlich, dass auch f auch zu jedem Untergitter von Λ doppelt-periodisch ist, da bei der Bildung eines Untergitters nur eine Einschränkung der $\lambda \in \Lambda$ vorgenommen wird, für die obige Bedingung bereits erfüllt ist.
Der Begriff "doppelt-periodisch"ergibt sich in Anlehnung an einfache Periodizität, die bei der Wahl von k oder l als Konstante 0 vorliegt.

Zunächst konzentrieren wir uns auf holomorphe doppelt-periodische Funktion, was sich jedoch als wenig ergiebig herausstellen wird, denn:

(1.3) Proposition
Ist eine doppelt-periodische Funktion holomorph, so ist sie konstant. $\diamond$

Um diese Aussage zu zeigen, sind zwei Schritte nötig; im ersten Schritt werden wir sehen, dass sich jedes $z \in \mathbb{C}$ eindeutig als Summe eines Gitterpunkts aus Λ und eines Punkts einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{C}$ ("Fundamentalmasche") darstellen lässt. Auf diese Darstellung lässt sich im zweiten Schritt die Definition der doppelten-Periodizität von f anwenden, die uns anschließend zur Nutzung des Satzes von Liouville führt.

Schritt 1): Sei f holomorph und doppelt-periodisch. Dann existiert ein Gitter $\Lambda = \Lambda(a, b)$, sodass $f(z + \lambda) = f(z) \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda\; \forall\, z \in \mathbb{C}$.
Definiere nun die in $\mathbb{C}$ beschränkte Teilmenge
$\mathscr{F} = \mathscr{F}(a, b) = \{t \cdot a + s \cdot b : 0 \leq s, t < 1\}$.

$\mathscr{F}$ wird **Fundamentalmasche** des Gitters Λ genannt; ihr Abschluss $\overline{\mathscr{F}}$ ist dann kompakt.

(1.4) Lemma
Sei $\mathscr{F}$ eine Fundamentalmasche des Gitters Λ. Dann existiert zu jedem $z \in \mathbb{C}$ genau ein $\lambda \in \Lambda$, sodass $z + \lambda \in \mathscr{F}$ ist.
$\mathbb{C}$ lässt sich also darstellen als Summe $\mathbb{C} = \mathscr{F} + \Lambda$. $\diamond$

Jeder Punkt aus $\mathbb{C}$ ist demzufolge modulo Λ konjugiert zu genau einem Punkt von $\mathscr{F}$.
$[z, w \in \mathbb{C}$ konjugiert modulo $\Lambda \Leftrightarrow z - w \in \Lambda]$
Bildlich gesprochen bedeutet dies: Nimmt man sich einen beliebigen Vektor $\vec{z}$ der komplexen Ebene, so findet man genau einen Punkt λ des Gitters, sodass $\vec{z} - \vec{\lambda}$ auf der Fundamentalmasche liegt.

Beweis
Sei $\mathscr{F} = \mathscr{F}(a, b)$ von a und b erzeugt.
Laut Voraussetzung sind a und b über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, d.h. jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich darstellen als $r \cdot a + v \cdot b = z$, wobei $r, v \in \mathbb{R}$.
Für die Darstellung mittels Gitterpunkten und Punkten aus $\mathscr{F}$ sind nun geeignete $m, n \in \mathbb{Z}$ und $t, s \in [0, 1)$ gesucht, sodass $r = m + t$ und $v = n + s$.
Dann ist $z = r \cdot a + v \cdot b = (m \cdot a + n \cdot b) + (t \cdot a + s \cdot b)$, wobei der erste Summand aus Λ und der zweite Summand aus $\mathscr{F}$ ist.

Die Frage ist demzufolge, ob sich eine reelle Zahl r als Summe einer ganzen Zahl m und einer reellen Zahl t aus dem Intervall [0,1) darstellen lässt. Dies ist jedoch offensichtlich möglich, wenn $m = \lfloor r \rfloor$ und $t = r - m$ gewählt werden.
Zur Eindeutigkeit: Gäbe es $z = \lambda + \mu = \lambda' + \mu'$, wobei $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ und $\mu, \mu' \in \mathscr{F}$, dann wäre $\mu - \mu' = \lambda' - \lambda \in \Lambda$. Für $\mu - \mu' = (t - t') \cdot a + (s - s') \cdot b$ mit $0 \leq s, t < 1$ folgt $|t - t'| < 1$ sowie $|s - s'| < 1$.
Da diese Differenzen jedoch auch in Λ liegen müssen, ist $\mu - \mu' = 0 = \lambda' - \lambda$, woraus die Eindeutigkeit folgt.

Denkt man an die komplexe Ebene zurück, so ist der Vektor $\vec{z}$ nun zerlegt in vier

einzelne Vektoren, von denen zwei zu je einem Gitterpunkt von Λ weisen und zwei auf dem Rand der Fundamentalmasche liegen.
Mit diesem Ergebnis können wir den zweiten Schritt beginnen:

Schritt 2): Laut Voraussetzung ist f holomorph, d.h. insbesondere stetig. Da $\overline{\mathscr{F}}$ kompakt ist, ist $f(\overline{\mathscr{F}})$ als stetiges Bild eines Kompaktums ebenfalls kompakt, also auch beschränkt. Wie soeben im Lemma gezeigt, gibt es für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein $\lambda \in \Lambda$ mit $z + \lambda \in \mathscr{F}$, d.h. $f(z) = f(z + \lambda) \in f(\mathscr{F})$, da f doppelt-periodisch bzgl. Λ ist.
Dies zeigt, dass f insgesamt beschränkt ist. Da f jedoch auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, muss f nach dem Satz von Liouville konstant sein.

Verlassen wir nun die wenig aufregenden holomorphen doppelt-periodischen Funktionen und wenden uns Λ-periodischen meromorphen Funktionen und einigen wesentlichen Eigenschaften zu.
Das Problem der Polstellen von f lässt sich insofern einschränken, als dass wir die Fundamentalmasche $\mathscr{F}$ so verschieben können, dass f auf der translatierten Masche keine Pole besitzt. Nun kann auch ein einfaches Beispiel angegeben werden.

(1.5) Proposition
Sei $\mathscr{F}$ eine Fundamentalmasche des Gitters Λ und f eine Λ-periodische meromorphe Funktion. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$, sodass f keinen Pol auf dem Rand der um w verschobenen Fundamentalmasche $\mathscr{F}_w = \mathscr{F} + w$ hat. Für jedes solche w ist dann

$$\int\limits_{\partial \mathscr{F}_w} f(z) dz = 0,$$

wobei $\partial \mathscr{F}_w$ der positiv orientierte Rand von $\mathscr{F}_w$ ist. ◇

Beweis
Angenommen, es gäbe kein w, sodass f keine Pole auf dem Rand von $\mathscr{F}_w$ hat. Dann haben die Pole von f einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, da in jeder Umgebung mindestens eines Pols unendlich viele andere Polstellen von f liegen. Laut Voraussetzung ist f jedoch meromorph; die Polstellen bilden eine diskrete Menge in $\mathbb{C}$ und besitzen damit keinen Häufungspunkt. Demzufolge existiert mindestens ein w, sodass auf $\partial \mathscr{F}_w$ keine Polstellen von f liegen.
Das Integral über $f(z)$ entlang des Rands der Fundamentalmasche ist Null, weil sich die Beiträge gegenüberliegende Seiten aufheben:

Für $\partial\mathscr{F}_w = [w, w+a, w+a+b, w+b, w]$ ist

$$\int\limits_{\partial\mathscr{F}_w} f(z)dz = \int\limits_{w}^{w+a} f(z)dz + \int\limits_{w+a}^{w+a+b} f(z)dz + \int\limits_{w+a+b}^{w+b} f(z)dz + \int\limits_{w+b}^{w} f(z)dz$$
$$= \int\limits_{w}^{w+a} f(z)dz + \int\limits_{w+a}^{w+a+b} f(z)dz - \int\limits_{w+b}^{w+a+b} f(z)dz - \int\limits_{w}^{w+b} f(z)dz$$

Mit der doppelten Periodizität folgen

$$\int\limits_{w}^{w+a} f(z)dz = \int\limits_{w+b}^{w+a+b} f(z)dz$$

und

$$\int\limits_{w+a}^{w+a+b} f(z)dz = \int\limits_{w}^{w+b} f(z)dz$$

demzufolge ist

$$\int\limits_{\partial\mathscr{F}_w} f(z)dz = \int\limits_{w+b}^{w+a+b} f(z)dz + \int\limits_{w}^{w+b} f(z)dz - \int\limits_{w+b}^{w+a+b} f(z)dz - \int\limits_{w}^{w+b} f(z)dz = 0$$

Mit der Hilfe der soeben bewiesenen Proposition können wir nun zeigen, dass die Summe aller Residuen von f auf jeder um beliebiges $w \in \mathbb{C}$ verschobenen Fundamentalmasche $\mathscr{F}_w$ - somit auch auf $\mathscr{F}$ selbst - ebenfalls 0 ergibt.

(1.6) Proposition
Sei f Λ-periodisch und $\mathscr{F}$ eine Fundamentalmasche des Gitters Λ.
Dann gilt für alle $w \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{z \in \mathscr{F}_w} res_z(f) = 0$$

Beweis
Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Fall: f hat auf dem Rand von $\mathscr{F}_w$ keinen Pol.
In diesem Fall lässt sich der Residuensatz anwenden, denn $\mathbb{C}$ ist offen, mit A als Menge der Polstellen von f ist $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph und $Sp(\partial\mathscr{F}_w) \subseteq \mathbb{C} \setminus A$.
$\partial\mathscr{F}_w$ ist nullhomolog in $\mathbb{C}$.

Demzufolge ist

$$\int_{\partial \mathscr{F}_w} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A} n_{\partial \mathscr{F}_w}(a) \cdot res_a(f)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial \mathscr{F}_w} f(z)dz = \sum_{a \in A} n_{\partial \mathscr{F}_w}(a) \cdot res_a(f)$$

wobei das Ergebnis aus der Proposition (1.5) verwendet wird. Da die Windungszahlen gerade 1 sind, folgt, dass die Summe der Residuen Null ergeben muss.

2. Fall: f hat mindestens einen Pol auf dem Rand von $\mathscr{F}_w$.
Dieser Fall lässt sich jedoch indirekt auf den obigen Fall zurückführen, wenn wir zeigen können, dass die Residuen Λ-konjugierter Punkte gleich sind, d.h.

$$\sum_{z \in \mathscr{F}_w} res_z(f) = \sum_{z \in \mathbb{C} \mod \Lambda} res_z(f).$$

Um dies zu beweisen, verwenden wir zunächst Lemma (1.4), das uns die Darstellung von $z \in \mathscr{F}_w$ als $z = \lambda + \mu$ mit $\lambda \in \Lambda$ und $\mu \in \mathscr{F}$ liefert. Schaut man auf den Funktionswert an der Stelle z und nutzt die doppelte Periodizität von f, so sieht man, dass

$$f(z) = f(z - \lambda) = f(\lambda + \mu - \lambda) = f(\mu)$$

ist. Hier wird zudem verwendet, dass mit λ auch $-\lambda$ eine Periode von f ist, denn $f(z - w) = f((z - w) + w) = f(z)$.
Die Koeffizienten der Laurentreihe von f in z sind identisch mit den Koeffizienten der Laurentreihe von f in einem Punkt von $\mathscr{F}$. Die identische Laurentreihenentwicklung, die zur Berechnung der Residuen hinzugezogen wird und eindeutig ist, liefert, dass auch die Summe über die Residuen den gleichen Wert annimmt.
Da die Aussage

$$\sum_{z \in \mathscr{F}_w} res_z(f) = 0$$

laut Proposition (1.5) für ein $w \in \mathbb{C}$ mit der Bedingung, dass f auf $\mathscr{F}_w$ keine Pole hat, gilt, folgt diese Gleichung für $z \in \mathscr{F}$.
Für jedes $v \in \mathbb{C}$ lassen sich die Funktionswerte von f in $\mathscr{F}_v$ jedoch auf Funktionswerte von f auf $\mathscr{F}$ zurückführen, d.h. auch

$$\sum_{z \in \mathscr{F}_v} res_z(f) = 0$$

Bevor wir uns eine konkrete doppelt-periodische Funktion ansehen, wird eine letzte Eigenschaft solcher Funktionen vorgestellt.

(1.7) Proposition
Sei $\mathscr{F}$ eine Fundamentalmasche zum Gitter Λ und f eine Λ-periodische meromorphe Funktion. Für jedes $w \in \mathbb{C}$ ist die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathscr{F}_w$ gleich der Anzahl der Polstellen von f in $\mathscr{F}_w$ (inklusive Vielfachheiten). $\diamond$

Beweis
Wir betrachten die nicht konstanten Funktionen f. Zunächst nutzen wir für den Beweis, dass $z_0 \in \mathbb{C}$ genau dann Null- bzw. Polstelle von f der Ordnung $\pm k \in \mathbb{Z}$ ist, wenn $\frac{f'}{f}$ in z_0 einen einfachen Pol vom Residuum k hat.
Aus der Funktionentheorie (Lemma V.2.6) ist bekannt, dass $f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ die Darstellung

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \cdot g(z),\ k \in \mathbb{Z}$$

besitzt, falls z_0 Polstelle k-ter Ordnung ist. Hierbei ist $g(z_0) \neq 0$ und g ist holomorph in einer Umgebung von z_0. In z_0 hat g höchstens eine hebbare Singularität. Es folgt

$$f'(z) = -k \cdot (z - z_0)^{-k-1} \cdot g(z) + g'(z) \cdot (z - z_0)^{-k}$$

Also ist der Quotient

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k \cdot (z - z_0)^{-k-1} \cdot g(z) + g'(z) \cdot (z - z_0)^{-k}}{(z - z_0)^{-k} \cdot g(z)} \\ &= \frac{-k}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \end{aligned}$$

wobei aus der Holomorphie von g die Holomorphie von g′ und somit auch die der Verkettung von g und g′ folgt.

Das Residuum von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist abzulesen, da $\frac{-k}{(z-z_0)}$ dem Hauptteil der Laurentreihenentwicklung um z_0 entspricht und $\frac{g'(z)}{g(z)}$ als in z_0 holomorphe Funktion nur Beiträge zum Nebenteil liefert. Es beträgt demzufolge $-k$, also der Ordnung von z_0.

Analog liefert die Darstellung von

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot h(z)$$

für z_0 als Nullstelle k-ter Ordnung den Quotienten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z-z_0)} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

also ebenfalls ein Residuum in z_0, das gleich der Ordnung der Nullstelle entspricht.

Weiterhin nutzen wir, dass mit f auch f' und somit auch $\frac{f'}{f}$ doppelt-periodisch zu Λ ist. Dies lässt sich aus der Kettenregel folgern, wenn man für $\lambda \in \Lambda$ die Translation $T_\lambda(z) := z + \lambda$ definiert. Da f elliptisch ist, gilt $f = f \circ T_\lambda$.

Also ist

$$f'(z) = (f \circ T_\lambda)'(z) = f'(T_\lambda(z)) \cdot T_\lambda'(z) = (f' \circ T_\lambda)(z),$$

d.h. f' ist ebenfalls doppelt-periodisch zu Λ.

Leicht zu sehen ist, dass der Quotient $h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(z+\lambda)}{f(z+\lambda)} = h(z+\lambda)$ genauso doppelt-periodisch zu Λ ist.

Nun verwenden wir das Argumentprinzip:
Mit den Nullstellen a_i und den Polstellen b_j sowie den jeweiligen Ordnungen $k(a_i)$ bzw. $k(b_j)$ folgt:

$$\sum_i n_{\partial \mathscr{F}_w}(a_i) \cdot k(a_i) - \sum_j n_{\partial \mathscr{F}_w}(b_j) \cdot k(b_j) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\partial \mathscr{F}_w} \frac{f'(z)}{f(z) - 0} dz = \sum_{z \in \mathscr{F}_w} res_z(\frac{f'}{f}) = 0,$$

wobei für die letzte Gleichung Proposition (1.6) verwendet wurde. Da die Windungszahlen jeweils 1 betragen, folgt die Behauptung.

An dieser Stelle sei hinzufügt, dass jeder Wert aus $\hat{\mathbb{C}}$ inklusive Vielfachheiten gleich oft angenommen wird. Dazu wende man das Argumentprinzip auf $f(z) - c$ an. $\square$

§ 2 Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird nun eine meromorphe doppelt-periodische Funktion vorgestellt, die nicht konstant ist. Sie wurde von K. Weierstraß im Wintersemester 1862/63 im Rahmen einer Vorlesung über die Theorie elliptischer Funktionen zum ersten Mal präsentiert. Zur Konstruktion dieser besonderen Funktion werden Mittag-Leffler-Reihen mit Polen in Gitterpunkten hinzugezogen.

(2.1) Definition (Weierstraßsche $\wp$-Funktion)
Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ist eine Λ-periodische meromorphe Funktion, die durch die Reihe

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

definiert ist. Diese Reihe konvergiert lokal gleichmäßig und absolut in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, d.h. $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$ für $z \notin \Lambda$ und $\wp(z) = \infty$ für $z \in \Lambda$. ◇

Zum Beweis der lokal gleichmäßigen Konvergenz in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ benötigen wir zunächst ein Konvergenzkriterium.

(2.2) Lemma
Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $s \in \mathbb{R}$. Genau dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0} \frac{1}{|\lambda|^s} ,$$

wenn $s > 2$ ist. ◇

Beweis
Der Fall $s = 0$ kann ausgeschlossen werden, da andernfalls eine unendliche Summation der 1 erfolgen würde.Für $s < 0$ wäre die Bedingung, dass eine Nullfolge vorliegt, verletzt.
Ist jedoch $s > 0$, so ist die Funktion $x \mapsto x^s$ für $x > 0$ monoton wachsend, d.h. die Folge $\frac{1}{|x|^s}$ ist für $|x| \to \infty$ monoton fallend, was notwendiges Kriterium für die Konvergenz ist.

Die Konvergenz vorausgesetzt, sei der Wert ψ für die Fundamentalmasche $\mathscr{F}$ definiert als

$$\psi = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{\chi_{\mathscr{F}_\lambda}}{|\lambda|^s},$$

wobei $\chi_{\mathscr{F}_\lambda}$ die charakteristische Funktion der um λ verschobenen Fundamentalmasche bezeichnet.

Bildet man das Integral über ψ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ergibt sich:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \psi(x+iy)dxdy = |\mathscr{F}| \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda_z|^s} ,$$

wobei mit $|\mathscr{F}|$ der Flächeninhalt der Fundamentalmasche bezeichnet ist, der sich durch Integration der charakteristischen Funktion ergibt. Da ψ als Konstante vor das Integral gezogen werden kann, gilt die Gleichung.

Wir wählen nun ein $r > 0$ so groß, dass der Abschluss $\overline{\mathscr{F}}$ der Fundamentalmasche ganz im offenen Kreis $K_r(0)$ um 0 mit Radius r enthalten ist und untersuchen alle $z \in \mathbb{C}$, die außerhalb dieses Kreises liegen, d.h. den nicht endlichen Anteil der Reihe.
Für ein z mit $|z| \geq r$ gilt

$$\psi(z) := \frac{1}{|\lambda_z|^s} ,$$

wobei λ_z ein Gitterpunkt von Λ ist mit $|z - \lambda_z| < r$, d.h. der zu z konjugierte Punkt der Fundamentalmasche liegt innerhalb des Kreises $K_r(0)$.

In diesem Fall gilt die Ungleichung

$$|\lambda_z| = |\lambda_z - z + z| \leq |\lambda_z - z| + |z| \leq r + |z| \leq 2|z|,$$

da $|z| \geq r$.

In die andere Richtung abschätzen lässt sich $|\lambda_z|$ für $|z| \geq 2r$ mittels der Dreiecksungleichung

$$|\lambda_z| = |\lambda_z - z - (-z)| \geq ||\lambda_z - z| - |z|| \geq \frac{1}{2}|z|,$$

denn $|\lambda_z - z| < r < |z|$.
Für $R = 2r$ sind beide Gleichungen erfüllt; dann gilt

$$|\lambda_z|^s \leq 2^s \cdot |z|^s \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_z|^s} \geq \frac{1}{2^s \cdot |z|^s}$$

sowie

$$|\lambda_z|^s \geq \frac{1}{2^s}|z|^s \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_z|^s} \leq \frac{2^s}{|z|^s} ,$$

also

$$\frac{1}{2^s \cdot |z|^s} \leq \psi(z) \leq \frac{2^s}{|z|^s}$$

Die Reihe $\psi(z)$ konvergiert genau dann, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, d.h. wenn

$$\int\limits_{|z|>R} \frac{1}{|z|^s} dxdy$$

beschränkt ist.
Um dies zu zeigen, wenden wir die Polarkoordinatentransformation an:
$x = r \cdot cos\delta,\ y = r \cdot sin\delta$ mit Jacobi-Determinante

$$\left| \begin{pmatrix} cos\delta & sin\delta \\ -r \cdot sin\delta & r \cdot cos\delta \end{pmatrix} \right| = r \cdot (cos^2\delta + sin^2\delta) = r$$

Dann ist

$$\int\limits_{|z|>R} \frac{1}{|z|^s} dxdy = \int\limits_{x^2+y^2>R} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{s}{2}}} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_R^{\infty} \frac{r}{r^{\frac{s}{2} \cdot 2}} drd\delta = 2\pi \cdot \int\limits_R^{\infty} \frac{1}{r^{s-1}} dr$$

Das letzte Integral ist genau dann beschränkt, wenn $s - 1 > 1 \Leftrightarrow s > 2$ ist. Also konvergiert die Reihe

$$\sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0} \frac{1}{|\lambda|^s}$$

über alle Gitterpunkte genau dann, wenn $s > 2$ ist. □

Dieses Lemma kann nun verwendet werden, um die lokal gleichmäßige Konvergenz der Weierstraßschen $\wp$-Funktion zu zeigen.

Beweis
Da $\frac{1}{z^2}$ einen endlichen Wert annimmt (schließlich betrachten wir nur z aus $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ und $0 \in \Lambda$), betrachten wir nur für ein z aus einer beschränkten Menge die Reihe

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

Für $|z| < \frac{1}{2}|\lambda|$ (das gilt für fast alle Gitterpunkte) ist

$$|\lambda - z| \geq ||\lambda| - |z|| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$$

sowie

$$|2\lambda - z| \leq |2\lambda| + |z| \leq 2|\lambda| + \frac{|\lambda|}{2} = \frac{5}{2}|\lambda|$$

Daraus folgt:

$$|\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}| = |\frac{\lambda^2 - (z-\lambda)^2}{(z-\lambda)^2 \cdot \lambda^2}| = |\frac{\lambda^2 - z^2 + 2\lambda z - \lambda^2}{\lambda^2 \cdot (z-\lambda)^2}|$$

$$= |\frac{z \cdot (2\lambda - z)}{\lambda^2 \cdot (z-\lambda)^2}| \leq \frac{|z| \cdot \frac{5}{2}|\lambda|}{0,5^2 \cdot |\lambda|^2 \cdot |\lambda|^2} = \frac{10 \cdot |z|}{|\lambda|^3}$$

Da $10|z|$ beschränkt ist, folgt mit dem zuvor bewiesenen Lemma die lokal gleichmässige und die absolute Konvergenz der Reihe. □

Nun untersuchen wir die $\wp$-Funktion auf ihre Periodizität, wofür wir zunächst zeigen, dass $\wp$ gerade ist.
Es gilt:

$$\wp(-z) = \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(-(z+\lambda))^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-(-\lambda))^2} - \frac{1}{(-\lambda)^2} = \wp(z)$$

Hierbei wird verwendet, dass über alle Gitterpunkte summiert wird, weswegen λ durch $-\lambda$ ersetzt werden kann. Diese Umordnung ist aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe erlaubt.

Mit dem Satz von Weierstraß und der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist es möglich, gliedweise zu differenzieren.

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{-2}{(z-\lambda)^3} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{-2}{(z-\lambda)^3}$$

Diese Funktion ist elliptisch, denn $\wp'(z + \lambda_0) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda+\lambda_0)^3} = \wp'(z)$, da mit λ auch $\lambda - \lambda_0$ alle Gitterpunkte durchläuft. (Auch für diese Reihe lässt sich absolute Konvergenz zeigen, sodass die Umordnung möglich ist.)
Betrachtet man

$$\frac{d}{dz}(\wp(z+\lambda) - \wp(z)) = \wp'(z+\lambda) - \wp'(z) = 0,$$

so sieht man, dass die Differenzfunktion $\wp(z+\lambda) - \wp(z)$ für $\lambda \in \Lambda$ konstant ist, wobei die Konstante c_λ noch von der Wahl von λ abhängen kann.

Falls λ aus $\{a, b\}$, d.h. aus der Menge der Erzeuger des Gitters stammt, gilt:

$$\wp(\frac{\lambda}{2}) = \wp(\frac{-\lambda}{2} + \lambda) = \wp(\frac{-\lambda}{2}) + c_\lambda = \wp(\frac{\lambda}{2}) + c_\lambda,$$

wobei genutzt wurde, dass $\wp$ gerade ist und $\wp(\frac{\lambda}{2})$ einen endlichen Wert annimmt. Die Konstante c_λ muss also Null sein.

Da diese Gleichung für die Erzeuger des Gitters Λ gilt, ist $\wp$ Λ-periodisch, womit die Behauptung, dass die $\wp$-Funktion meromorph und Λ-periodisch ist, gezeigt ist.

Wir haben damit eine nicht-konstante, meromorphe und doppelt-periodische Funktion gefunden, die in den Gitterpunkten Polstellen zweiter Ordnung hat.

Literatur:

- Deitmar, Anton: Automorphe Formen
- Freitag, Eberhard/Busam, Rolf (2009): Complex Analysis. Heidelberg: Springer, S. 251-264.
- Fritzsche, Klaus (2009): Grundkurs Funktionentheorie. Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen. Heidelberg: Spektrum, S.235-241.